

3. Wavelet-Transformation

3. Wavelet-Transformation

- Bei Kurzzeit-Fourier-Transformation:
Gleiche Zeit-Frequenz-Auflösung in der gesamten Zeit-Frequenz-Ebene
- Praxis: Viele Signale weisen hohe Spektralanteile nur in zeitlich kurzen Intervallen auf
- Beispiel: In Bildern sind die **hochfrequenten** Informationen der Kanten räumlich konzentriert
- Problem bei STFT: Kompromissfindung

Breites Analysefenster



Schmales Analysefenster



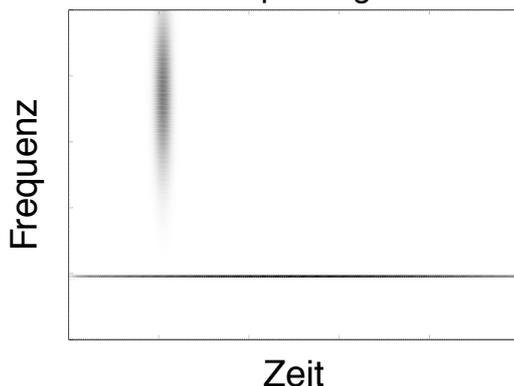
3.1 Kontinuierliche Wavelet-Transformation

3.1 Kontinuierliche Signale

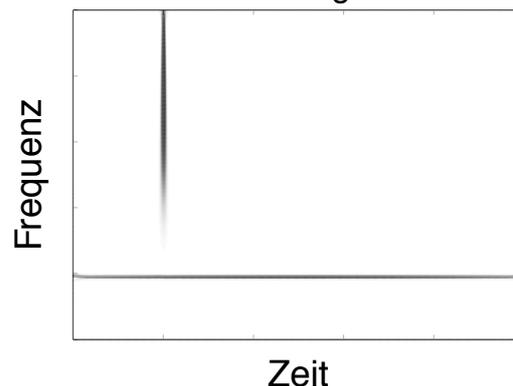
3.1.1 Skalierung des Analysefensters

- Bei STFT: Zeit- und Frequenzverschiebung des Analysefensters; Zeitdauer und Bandbreite ändern sich dabei nicht (Verschiebungsinvarianz)
- Wavelet-Transformation: Zeitverschiebung und **Skalierung** des ‚Fensters‘
- Skalierung → Änderung von Zeitdauer und Bandbreite, mittlerer Zeit und Mittenfrequenz
- Mittlere Frequenz f_w des Fensters muss ungleich null sein, sonst keine Änderung durch Skalierung

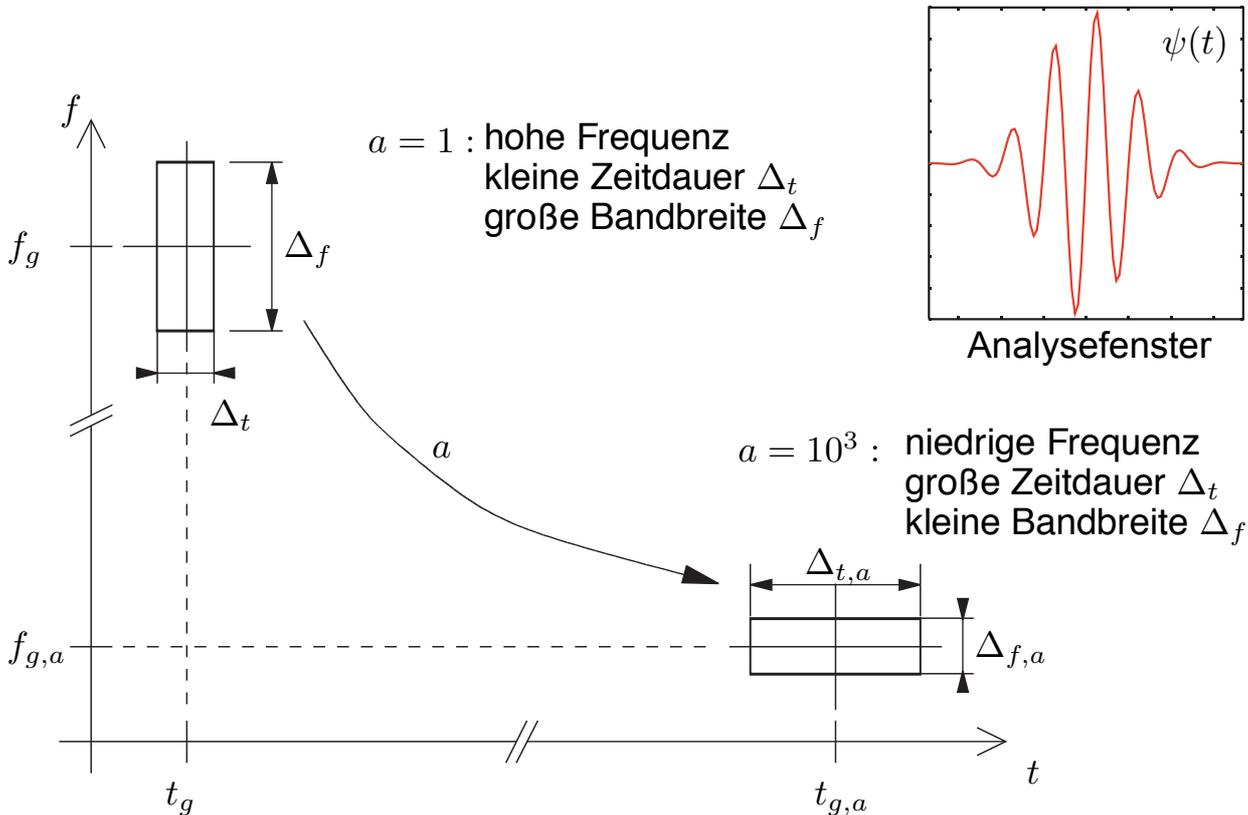
STFT: Spektrogramm



WT: Skalogramm



3.1.1 Skalierung des Analysefensters



3.1.2 Definition der Wavelet-Transformation

- Bei STFT: Vergleich (Innenproduktbildung) des zu analysierenden Signals $x(t)$ mit zeit- und frequenzverschobenen Fenstern $\gamma(t-\tau) \exp(j2\pi ft)$
- Wavelet-Transformation: ebenfalls Vergleich (Innenproduktbildung) des Signals mit einer Familie von Basisfunktionen, den Wavelets (fr. *ondelette*, „Wellchen“ → kompakt, oszillierend)
- Allerdings Skalierung und Zeitverschiebung des sog. **mittelwertfreien** „Mutterwavelets“:

Mutterwavelet: $\psi(t) = \gamma(t) \exp(j2\pi f_\psi t)$

Wavelets: $\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$

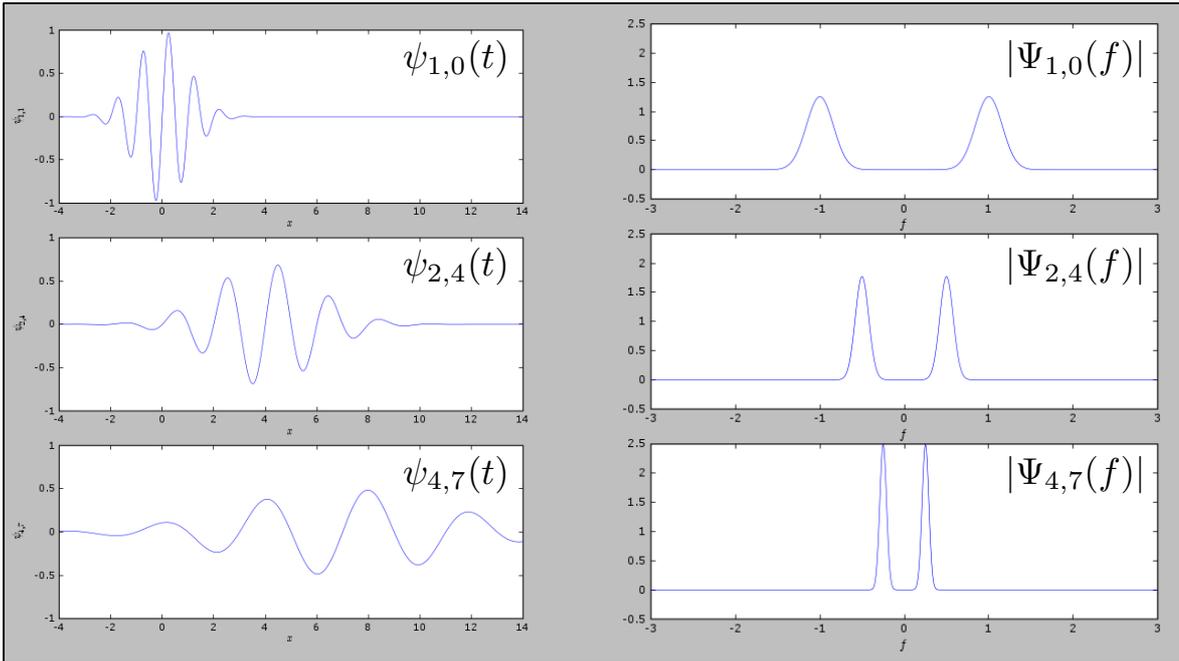
- Der Vorfaktor stellt sicher, dass die Signalenergie skalunabhängig ist
- Mittlere Zeit: $\tau = b$ (bei $t_\psi = 0$)

Mittlere Frequenz: $f = \frac{f_\psi}{a}$

3.1.2 Definition der Wavelet-Transformation

Beispiel: $\psi(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \sin(2\pi t)$

$$\psi_{a,b}(t) \longleftrightarrow \Psi_{a,b}(f) = j \sqrt{\frac{\pi a}{2}} \left(e^{-2\pi^2(a f + 1)^2} - e^{-2\pi^2(a f - 1)^2} \right) e^{-j2\pi b f}$$



3.1.2 Definition der Wavelet-Transformation

Definition: Wavelet-Transformation

- Die Wavelet-Transformation ist die Projektion des zu analysierenden Signals $x(t)$ auf das skalierte und zeitverschobene Analysewavelet:

$$W_x^\psi(a,b) = \langle x(t), \psi_{a,b}(t) \rangle_t = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt$$

- Das Wavelet muss mittelwertfrei sein, und es muss die Zulässigkeitsbedingung (vgl. Abschnitt 3.1.4) erfüllen.

- Durch Fourier-Trafo (Skalierungs- und Verschiebungssatz) erhält man:

$$\Psi_{a,b}(f) = \mathcal{F}\{\psi_{a,b}(t)\} = \sqrt{|a|} \Psi(af) \exp(-j2\pi fb)$$

- Mit dem Satz von Parseval folgt:

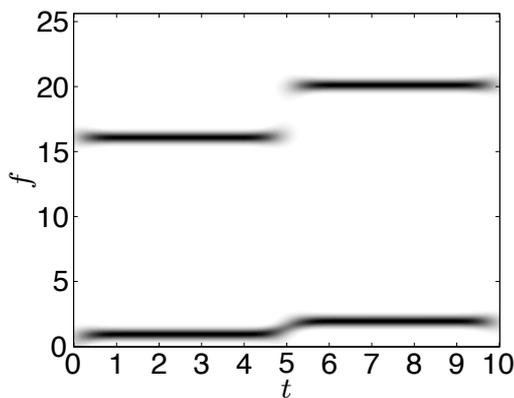
$$W_x^\psi(a,b) = \langle X(f), \Psi_{a,b}(f) \rangle_f = \sqrt{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Psi^*(af) \exp(j2\pi fb) df$$

Definition: Skalogramm

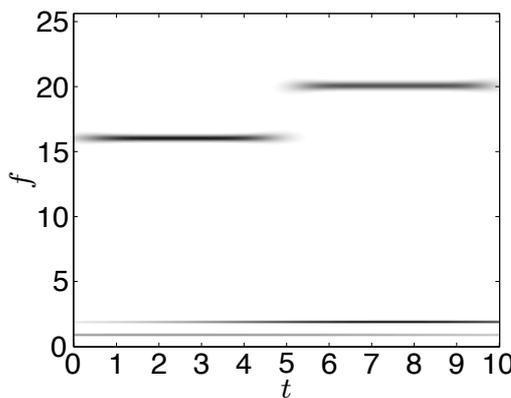
- Das Skalogramm ist das Betragsquadrat der Wavelet-Transformierten:

$$|W_x^\psi(a,b)|^2 = \left| \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left(\frac{t-b}{a} \right) dt \right|^2$$

Beispiel 3.3: Frequenzsprung zweier überlagerter Sinussignale



(a) Spektrogramm



(b) Skalogramm

3.1.4 Zulässigkeitsbedingung

Definition: Zulässigkeitsbedingung

- Ein stückweise stetiges **Energiesignal**, das die Zulässigkeitsbedingung

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(af)|^2}{|f|} df < \infty \quad C_\Psi : \text{Zulässigkeitskonstante}$$

erfüllt, ist ein gültiges Wavelet

- Alternative, äquivalente Form:

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(f)|^2}{|f|} df < \infty$$

- Zulässigkeitskonstante hängt von der Kurvenform ab

- Sinn dieser Definition:

- Forderung nach Mittelwertfreiheit $\Psi(0) = 0$ eingeschlossen
- Wavelet hat Bandpasscharakter
- Existenz von C_Ψ für Rücktransformation und Energieerhaltung nötig

Kompakte Energiesignale als Wavelets

- Ein stückweise stetiges Signal, das die folgenden drei Bedingungen erfüllt, ist ein gültiges Wavelet [KSW08]:

- Normierung der Signalenergie:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1$$

- Kompaktheit:
$$\int_{-\infty}^{\infty} |t \cdot \psi(t)| dt \leq S < \infty$$

- Mittelwertfreiheit:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0$$

Ableitungen stetiger Energiesignale als Wavelets

- Die normierten Ableitungen stetiger Energiesignale erfüllen ebenfalls die Zulässigkeitsbedingung für Wavelets [KSW08]

3.2 Eigenschaften der Wavelet-Transformation

3.2.1 Verschiebungs- und Affin-Invarianz

Verschiebungsinvarianz bezüglich der Zeit

- Verschiebung des Signals \rightarrow Verschiebung der Wavelet-Transformierten

$$\begin{aligned}
 x_s(t) = x(t - t_s) \quad \rightarrow \quad W_{x_s}^\psi(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_s) \psi^* \left(\frac{t - b}{a} \right) dt \\
 &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \psi^* \left(\frac{t' + t_s - b}{a} \right) dt' \\
 &= W_x^\psi(a, b - t_s)
 \end{aligned}$$

- Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn man mittels $\tau = b$ und $f = f_\Psi/a$ die Wavelet-Transformierte in der **Zeit-Frequenz-Ebene** (vgl. STFT) darstellt:

$$W_{x_s}^\psi(\tau, f) = W_x^\psi(\tau - t_s, f)$$

3.2.1 Verschiebungs- und Affin-Invarianz

Affin-Invarianz

- Skalierung des Signals um den Faktor $s \rightarrow$ Skalierung der Wavelet-Transformierten um den gleichen Faktor (bei Erhaltung der Signalenergie):

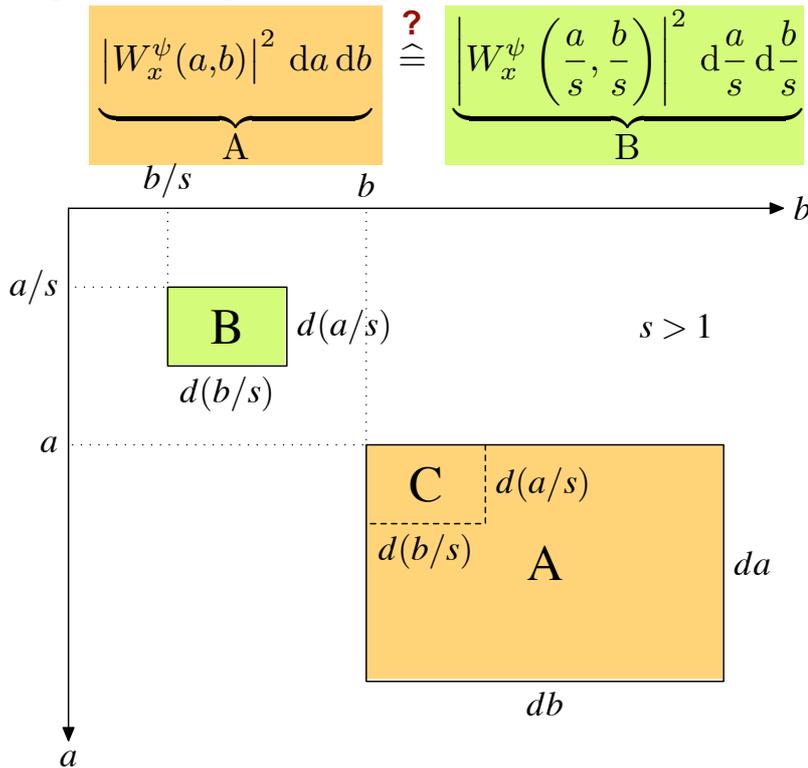
$$\begin{aligned}
 x_s(t) = \frac{1}{\sqrt{|s|}} x\left(\frac{t}{s}\right) \quad W_{x_s}^\psi(a, b) &= \frac{1}{\sqrt{|as|}} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{t}{s}\right) \psi^* \left(\frac{t - b}{a} \right) dt \quad \left| \cdot \frac{s}{s} \right. \\
 &= \frac{1}{\sqrt{|a/s|}} \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\frac{t}{s}\right) \psi^* \left(\frac{t/s - b/s}{a/s} \right) d(t/s) \\
 &= W_x^\psi\left(\frac{a}{s}, \frac{b}{s}\right)
 \end{aligned}$$

- Gleiches Ergebnis erhält man in der Zeit-Frequenz-Ebene:

$$W_{x_s}^\psi(\tau, f) = W_x^\psi\left(\frac{\tau}{s}, f \cdot s\right)$$

3.2.2 Verteilung der Signalenergie

- Betrachtung der Energie der Signale $x(t)$ und $x_s(t)$ in der a, b -Ebene:



3.2.2 Verteilung der Signalenergie

Diskussion

- Um Energieerhaltung zu erzielen, müssen die Rechtecke **A** und **B** den gleichen Anteil an der Signalenergie der Wavelet-Transformierten enthalten, obwohl das Rechteck **A** eine um s^2 größere Fläche hat.
- Analog muss das Rechteck **C** einen gegenüber dem Rechteck **B** um s^2 geringeren Anteil an der Signalenergie der Wavelet-Transformierten enthalten, obwohl beide Rechtecke die gleiche Fläche besitzen.
- Die Skalierungsfaktoren a und s können nach der Transformation nicht mehr nach ihrer Herkunft getrennt werden. Deshalb muss gleich großen Rechtecken mit wachsendem Skalierungsfaktor a ein um $1/a^2$ gewichteter Anteil an der Signalenergie zugeordnet werden.
- Dies muss bei der Integration der Wavelet-Transformierten über der a, b -Ebene berücksichtigt werden, wenn die Energie des Signals erhalten bleiben soll.

- **Energiedichte** wird mit $1/a^2$ **gewichtet**, **Innenprodukt** neu definiert

Energieerhaltungssatz

- Genau dann, wenn für das Wavelet $\psi(t)$ die **Zulässigkeitsbedingung**

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(af)|^2}{|a|} da < \infty$$

erfüllt ist, gilt mit der Definition

$$\langle W_x^\psi(a,b), W_y^\psi(a,b) \rangle = \frac{1}{C_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^\psi(a,b) \cdot (W_y^\psi(a,b))^* \frac{da db}{a^2}$$

für das **Innenprodukt** der Wavelet-Transformierten Energieerhaltung:

$$\langle x(t), y(t) \rangle_t = \langle W_x^\psi(a,b), W_y^\psi(a,b) \rangle .$$

- Gegenstück zum **Satz von Parseval** für die Wavelet-Transformation

- Energieerhaltung gilt auch für unterschiedliche Wavelets
- Erweiterung der Zulässigkeitsbedingung erforderlich

Energieerhaltungssatz (unterschiedliche Wavelets)

- Genau dann, wenn für die Wavelets $\psi(t)$ und $\tilde{\psi}(t)$ die **erweiterte Zulässigkeitsbedingung**

$$C_{\psi\tilde{\psi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi^*(af) \tilde{\Psi}(af)}{|a|} da < \infty$$

erfüllt ist, gilt mit der Definition

$$\langle W_x^\psi(a,b), W_y^{\tilde{\psi}}(a,b) \rangle = \frac{1}{C_{\psi\tilde{\psi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^\psi(a,b) \cdot (W_y^{\tilde{\psi}}(a,b))^* \frac{da db}{a^2}$$

für das Innenprodukt der Wavelet-Transformierten die Energieerhaltung:

$$\langle x(t), y(t) \rangle_t = \langle W_x^\psi(a,b), W_y^{\tilde{\psi}}(a,b) \rangle .$$

3.2.4 Rekonstruktion des Zeitsignals

- Die Transformation eines Signals $x(t)$ erfolgt mit dem Analyse-Wavelet $\psi(t)$, dessen Rekonstruktion mit dem Synthese-Wavelet $\tilde{\psi}(t)$
- Das Innenprodukt von $x(t')$ mit einem Dirac-Impuls $y(t') = \delta(t' - t)$ ergibt gerade die Rekonstruktion des Signals. Aufgrund der Energieerhaltung gilt:

$$\langle W_x^\psi(a,b), W_\delta^{\tilde{\psi}}(a,b) \rangle = \langle x(t'), \delta(t - t') \rangle_{t'} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t') \delta(t - t') dt' = \hat{x}(t)$$

- Mit der Definition des Innenprodukts von Wavelet-Transformierten folgt:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \frac{1}{C_{\psi\tilde{\psi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^\psi(a,b) \cdot [W_\delta^{\tilde{\psi}}(a,b)]^* \frac{da db}{a^2} \\ &= \frac{1}{C_{\psi\tilde{\psi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^\psi(a,b) \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t') \frac{1}{\sqrt{|a|}} \tilde{\psi}^*\left(\frac{t' - b}{a}\right) dt' \right]^* \frac{da db}{a^2} \\ &= \frac{1}{C_{\psi\tilde{\psi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^\psi(a,b) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \tilde{\psi}\left(\frac{t - b}{a}\right) \frac{da db}{a^2} \end{aligned}$$

3.2.4 Rekonstruktion des Zeitsignals

- Rekonstruktion:
$$\hat{x}(t) = \frac{1}{C_{\psi\tilde{\psi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^\psi(a,b) \cdot \tilde{\psi}_{a,b}(t) \frac{da db}{a^2}$$

- Die **Zulässigkeitsbedingung** für Analyse- und Synthese-Wavelets

$$C_{\psi\tilde{\psi}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Psi^*(f) \cdot \tilde{\Psi}(f)}{|f|} df < \infty$$

ist **notwendig und hinreichend** für die Rekonstruktion.

Anmerkungen:

- Bei reellen Funktionen $x(t)$ und reellen Wavelets $\psi(t)$ ist auch die Wavelet-Transformierte reell
- In solchen Fällen ist der Rechenaufwand für die Wavelet-Transformation oft geringer als für die Fourier-Transformation (vgl. Kap. 4)

3.3 Wavelet-Funktionen

3.3 Wavelet-Funktionen

3.3.1 Gabor-Wavelet

- Gauß-Impuls hat kleinstes Zeitdauer-Bandbreite-Produkt
- Durch Modulation des Gauß-Impulses mit einer komplexen Harmonischen der Frequenz f_ψ entsteht das häufig verwendete Gabor-Wavelet:

$$\psi(t) = \left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{\beta}{2}t^2\right) \exp(j2\pi f_\psi t)$$



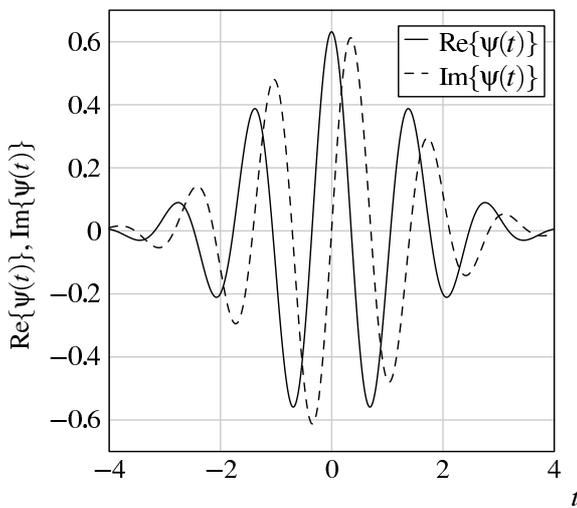
$$\Psi(f) = \sqrt{2} \left(\frac{\pi}{\beta}\right)^{\frac{1}{4}} \exp\left(-\frac{2\pi^2 (f - f_\psi)^2}{\beta}\right)$$

- Gabor-Wavelet nicht mittelwertfrei, da $\Psi(0) \neq 0 \Rightarrow$ Zulässigkeitsbedingung nicht erfüllt (durch günstige Wahl von $f_\psi = f(\beta)$ näherungsweise erfüllbar)
- Energieerhaltung gilt nicht, Rekonstruktion ebenfalls nicht möglich – dennoch sinnvolle Aussage über Energieverteilung in Zeit-Frequenz-Ebene

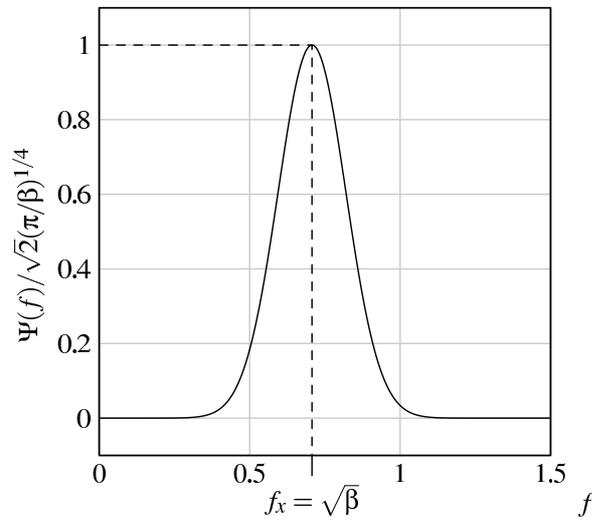
3.3.1 Gabor-Wavelet

■ Wahl der Mittenfrequenz, damit Wavelet näherungsweise mittelwertfrei:

$$f_\psi = \sqrt{\beta} \quad \rightarrow \quad \frac{\Psi(0)}{\sqrt{2}(\pi/\beta)^{1/4}} = e^{-2\pi^2} \approx 2,9 \cdot 10^{-9}$$



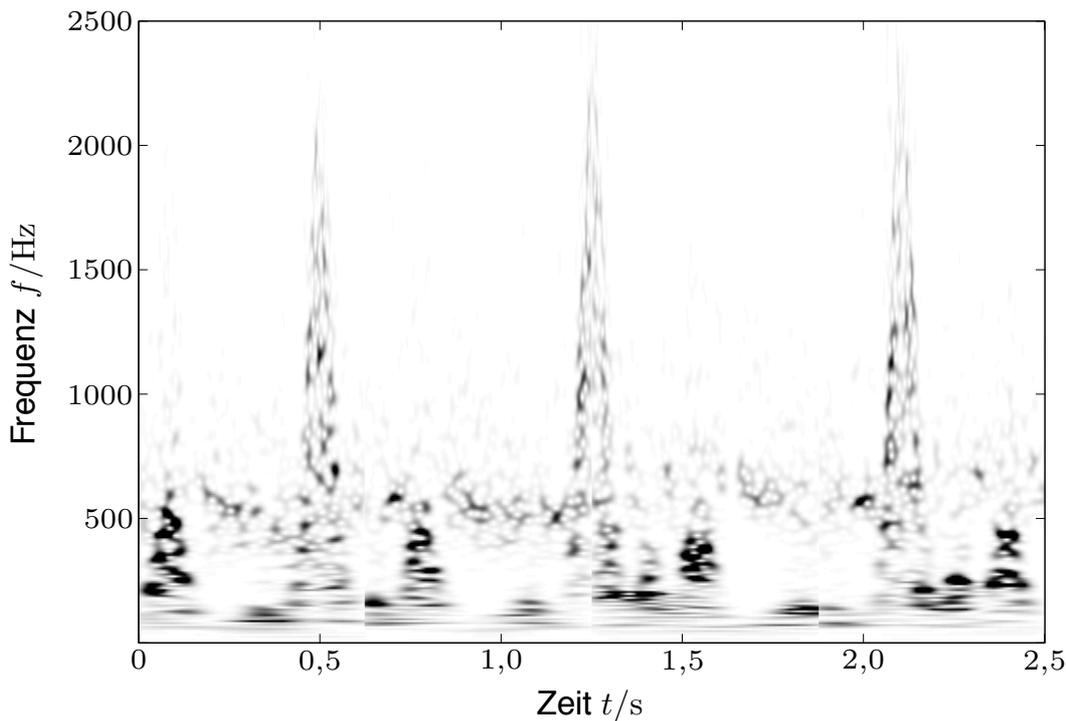
(a) Zeitlicher Verlauf



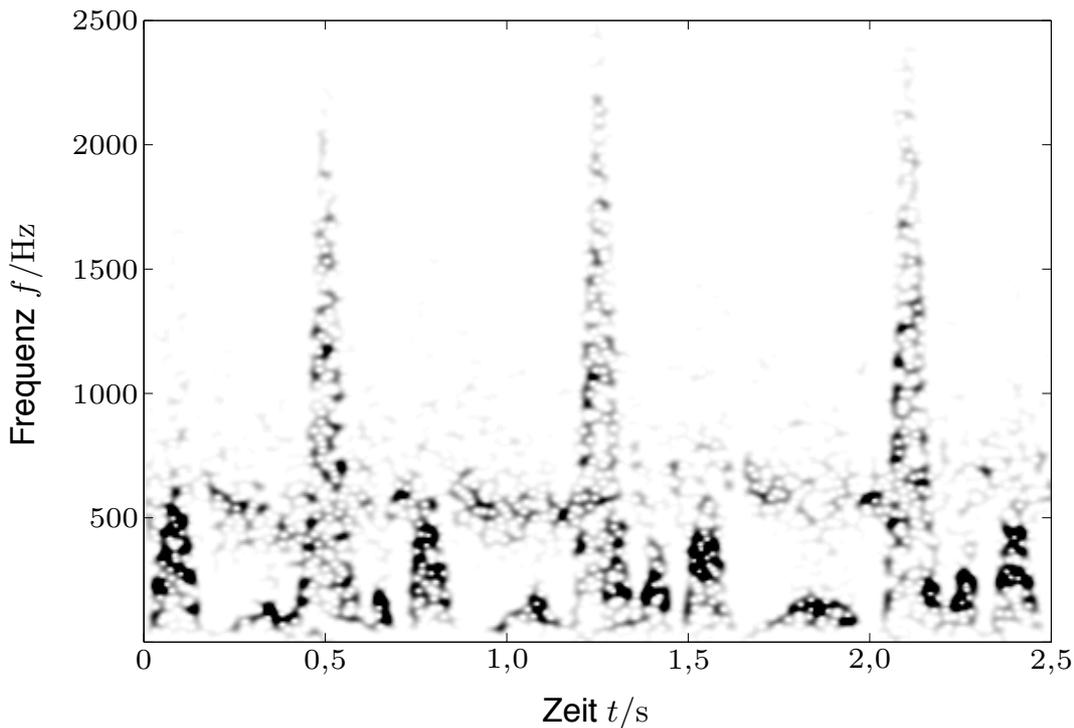
(b) Normiertes Spektrum

3.3.1 Gabor-Wavelet

Beispiel: Ultraschall-Doppler-Messtechnik (Skalogramm)



Vergleich: Ultraschall-Doppler-Messtechnik (Spektrogramm)



Beispiel: Wavelet-Koeffizienten als Merkmale zur Gesichtserkennung

- Ansatz: Vergleich von geeigneten Gesichtspartien (z. B. Augen, Mund)
- Verwendung der Wavelet-Koeffizienten als **Merkmale**, da in diesen wesentliche Informationen (z. B. Kanten) enthalten sind
- Zweidimensionales, gerichtetes und skaliertes Gabor-Wavelet:

$$\psi_{a,\varphi}(x,y) = \frac{a}{\sqrt{\pi} \lambda} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\lambda^2}\right) \left[\exp\left(j2\pi \frac{x \cos \varphi + y \sin \varphi}{\lambda}\right) - c \right]$$

Orientierungswinkel φ

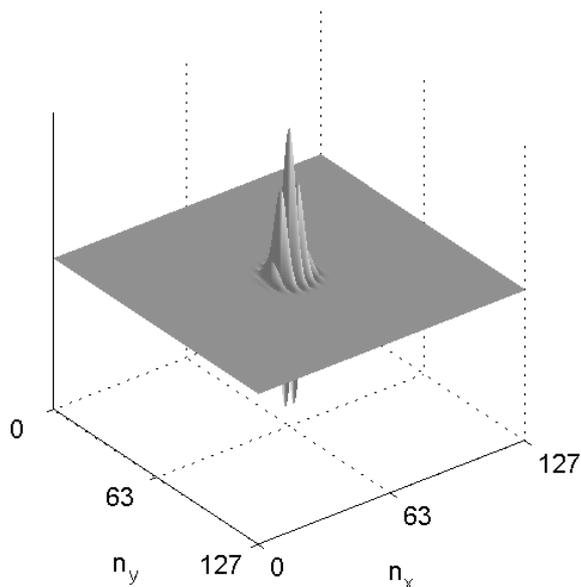
Wellenlänge $\lambda = \frac{a}{\sqrt{\beta}}$

- Konstante $c = \exp(-2\pi^2)$ zur Kompensation des Gleichanteils des Wavelets (sonst Abhängigkeit von homogenen Helligkeitsänderungen)
- Koeffizienten sind i. Allg. skalenabhängig
- Diskretisierung: Pixelbreite q

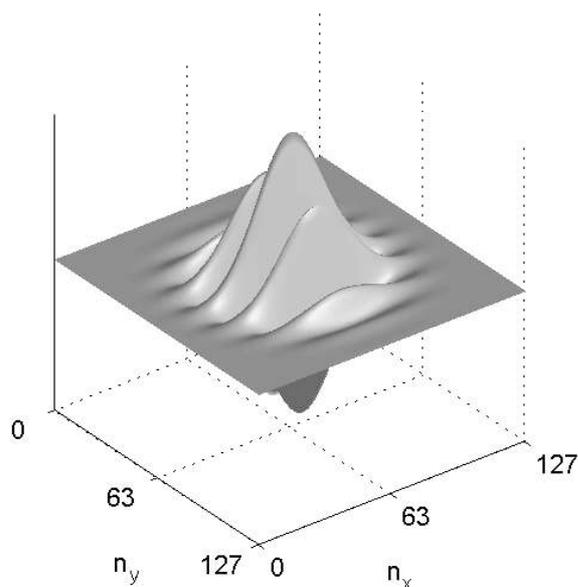
$$x = n_x \cdot q \quad a = 2^{k/2}$$

$$y = n_y \cdot q$$

Zweidimensionales Gabor-Wavelet

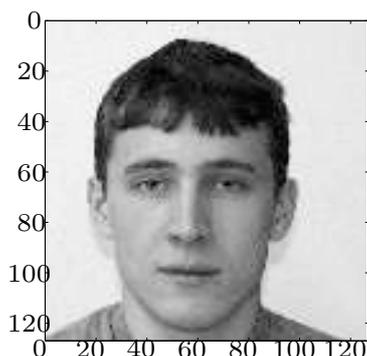


(a) $k = 0, \varphi = 0$

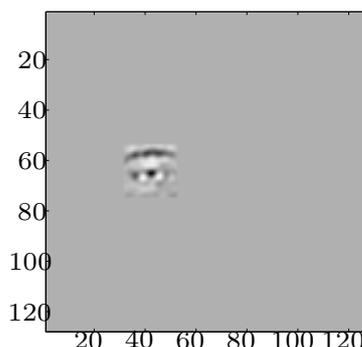


(b) $k = 4, \varphi = \pi/2$

3.3.1 Gabor-Wavelet



(a) Originalbild



(b) Gesichtsmerkmal

- Originalbild: $N^2 = 256 \times 256 = 65.536$ Werte
- Berechnung der Wavelet-Koeffizienten an den Ortsmittelpunkten der Gesichtspartien (sogenannte *Jets*)
- 6 Jets, 5 Skalierungen, 8 Winkel

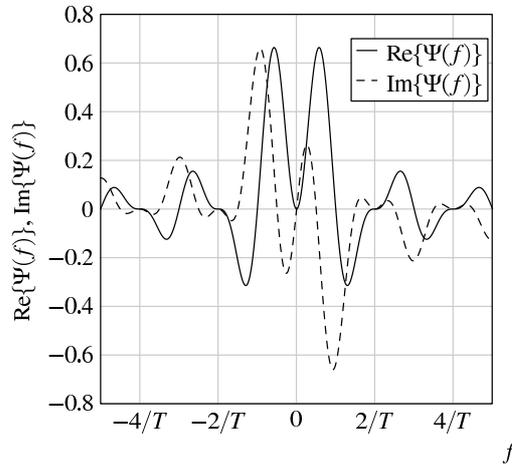
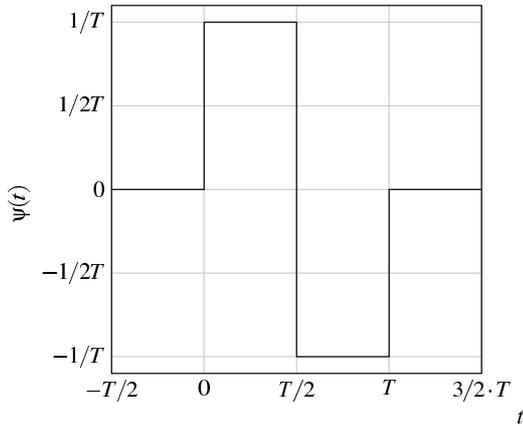
$$k = 0, \dots, 4 \quad \varphi = \alpha \cdot \frac{\pi}{8}, \quad \alpha = 0, \dots, 7$$

- 240 Werte statt 65.536 → deutliche Reduktion, schneller Vergleich!

3.3.2 Haar-Wavelet

$$\psi(t) = \begin{cases} 1/T & \text{für } 0 \leq t < T/2 \\ -1/T & \text{für } T/2 \leq t < T \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \Psi(f) = j \cdot \exp(-j\pi f T) \cdot \frac{\sin^2(\pi f T/2)}{\pi f T/2}$$

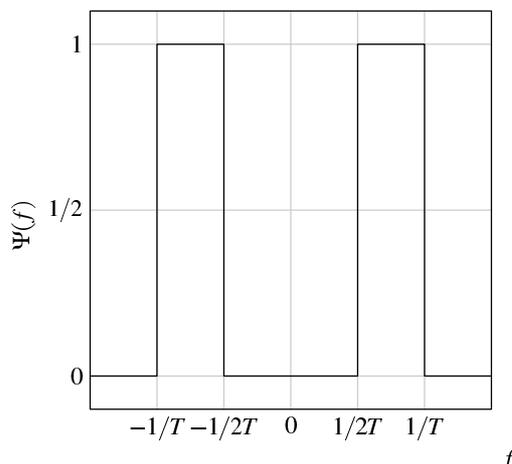
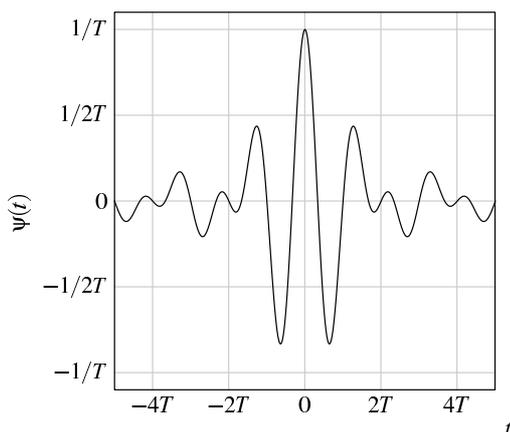
- Reellwertiges Signal, einfachstes Wavelet im Zeitbereich
- Große **Frequenzunschärfe** durch Unstetigkeiten und Begrenzung im Zeitbereich



3.3.3 Shannon-Wavelet

$$\psi(t) = \frac{1}{T} \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} \cdot \frac{t}{T}\right) \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{T}\right)}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{t}{T}} \quad \Psi(f) = \begin{cases} 1 & \text{für } \frac{1}{2T} \leq |f| \leq \frac{1}{T} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- Sehr scharf in der Frequenz (cos-modulierte sinc-Funktion)
- Große **Zeitunschärfe** durch Unstetigkeiten im Frequenzbereich



3.4 Semidiskrete, dyadische Wavelets

3.4 Semidiskrete, dyadische Wavelets

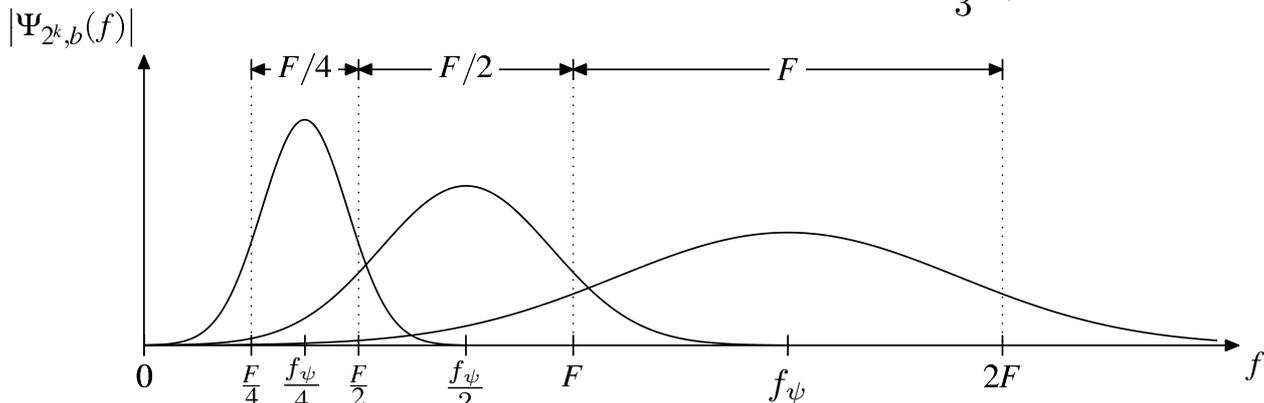
3.4.1 Dyadisch diskretisierter Skalierungsfaktor

- Skalierungsfaktor wird in diskreten Potenzen von 2 verändert: $a_k = 2^k$

- Mittlere Frequenz bei Skalierung: $f_{\psi,a} = \frac{f_\psi}{a_k} = 2^{-k} \cdot f_\psi$

- Breite der Frequenzintervalle: $F_k = \frac{F}{a_k} = 2^{-k} \cdot F$

- Günstige Wahl für die Intervallbreiten: $F = \frac{2}{3} f_\psi$

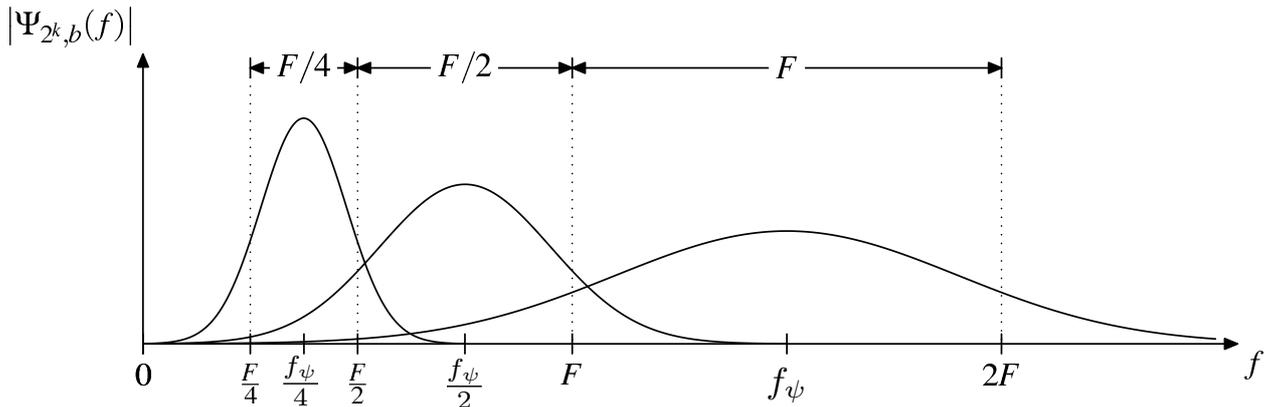


Beispiel: Parametrierung des Gabor-Wavelets

■ Effektive Bandbreite des Gabor-Wavelets:

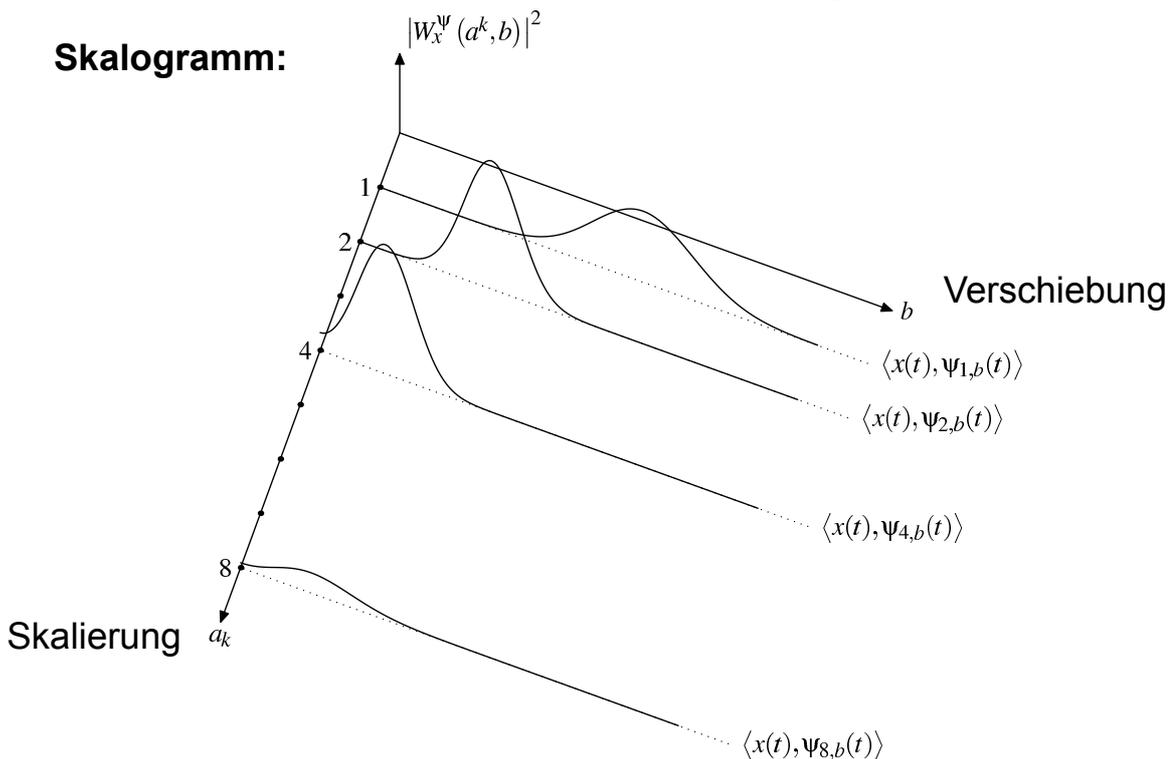
$$F_{\text{eff}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(f)|}{\Psi_{\text{max}}} df = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{2\pi^2(f - f_{\psi})^2}{\beta}\right) df = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}}$$

⇒ Breite der Frequenzintervalle: $F = \frac{2}{3}f_{\psi} = \frac{2}{3}\sqrt{\beta} = \frac{2}{3}\sqrt{2\pi} \cdot F_{\text{eff}} = 1,67 F_{\text{eff}}$



Beispiel: Wavelet-Transformation eines Chirp-Signals $x(t) = \sin(k t^2)$

Skalogramm:



- Nach Abschnitt 3.2.4 erfolgt die Rekonstruktion allgemein wie folgt:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{C_{\psi\tilde{\psi}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^{\psi}(a,b) \frac{1}{\sqrt{|a|}} \tilde{\psi}\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{da db}{a^2}$$

- Bei einer (dyadischen) Diskretisierung des Skalierungsfaktors geht die Integration über $a = 2^k$ in eine Summation über k über
- Für die Gewichtung der Signalanteile in b -Richtung wird der Faktor $1/a$ durch $1/2^k$ ersetzt
- Die Gewichtung in a -Richtung ist bereits durch die weiter entfernten Abtastpunkte bei wachsendem a berücksichtigt
- Für die Rekonstruktion ergibt sich somit der **Ansatz**:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W_x^{\psi}(2^k, b) \frac{1}{2^{k/2}} \tilde{\psi}(2^{-k}(t-b)) \cdot \frac{db}{2^k} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-3k/2} \left\langle W_x^{\psi}(2^k, b), \tilde{\psi}^*(2^{-k}(-(b-t))) \right\rangle_b \end{aligned}$$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-3k/2} \left\langle \underbrace{W_x^{\psi}(2^k, b)}_{\mathcal{F}^{-1}\{X(f) 2^{k/2} \Psi^*(2^k f)\}}, \underbrace{\tilde{\psi}^*(2^{-k}(-(b-t)))}_{\mathcal{F}^{-1}\{2^k \tilde{\Psi}^*(2^k f) \exp(-j2\pi ft)\}} \right\rangle_b$$

- Nach dem Satz von Parseval ist das Innenprodukt der Fourier-Transformierten bzgl. f identisch:

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{-3k/2} \left\langle X(f) 2^{k/2} \Psi^*(2^k f), 2^k \tilde{\Psi}^*(2^k f) \exp(-j2\pi ft) \right\rangle_f \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \Psi^*(2^k f) \tilde{\Psi}(2^k f) \exp(j2\pi ft) df \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(j2\pi ft) \cdot \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} \Psi^*(2^k f) \tilde{\Psi}(2^k f)}_{\stackrel{!}{=} 1} df = x(t) \end{aligned}$$

Rekonstruktionsbedingung für semidiskrete, dyadische Wavelets

■ Dyadisch semidiskretisierte Wavelet-Trafo (Filterbank-Interpretation):

$$W_x^\psi(2^k, b) = \frac{1}{2^{k/2}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^*(2^{-k}(t - b)) dt = x(b) * 2^{-k/2} \cdot \psi^*(-2^{-k} b),$$

$k = -\infty, \dots, +\infty$

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} W_x^\psi(2^k, t) * 2^{-3k/2} \cdot \tilde{\psi}(2^{-k}t)$$

